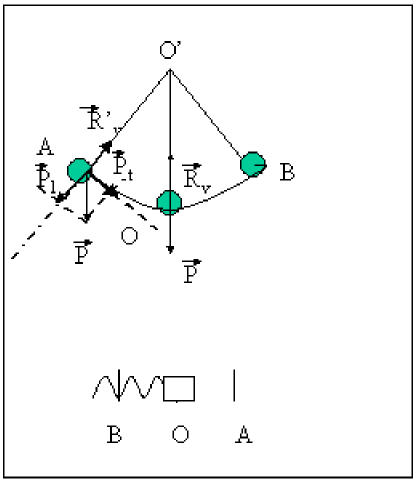
MOTI OSCILLATORI. TORNA ALL'INDICE



Il pendolo, se spostato dalla sua posizione di riposo(posizione verticale) O, si mette ad oscillare attorno ad essa, raggiungendo a sinistra e a destra due posizioni simmetriche A e B. OB sarà uguale ed opposto ad OA. Se non ci fosse l'attrito tali oscillazioni continuerebbero all'infinito. Nella posizione di riposo la forza peso P è completamente annullata dalla reazione vincolare del filo, che reagisce solo alle forze che agiscono lungo di esso. La risultante delle forze è perciò nulla e quindi se lasciato in detta posizione il pendolo resta fermo. Nella posizione A invece il filo annulla solo la componente della forza peso P_l e perciò la risultante delle forze è P_t, componente della forza peso perpendicolare al filo. Sotto l'azione di tale forza il corpo acquista velocità e và verso O. Man mano che si avvicina ad O la componente P_t diminuisce fino ad annullarsi in O. Il pendolo però arriva in O avendo acquistato una certa velocità, perciò continua verso B. Appena superato O la P_t aumenta , cambiando però verso(la P_t punta sempre verso O), e quindi fa diminuire la velocità, che si annulla in B. Il pendolo torna perciò verso O acquistando di nuovo velocità, che però ha verso opposto rispetto a prima. In O la velocità riacquista il valore massimo, ma opposto rispetto al precedente passaggio in O. Dopo O la velocità diminuisce fino ad annullarsi in A, perché P_t cambia verso e si oppone al movimento. Quando il pendolo è tornato in A ripiglia le condizioni iniziali e comincia la sua seconda oscillazione. Il moto del pendolo è perciò un moto periodico e il Periodo T è l'intervallo di tempo occorrente per compiere un'oscillazione completa AOBOA o BOAOB.Calcoliamo il valore della componente P_t. Si noti che i triangoli rettangoli AP_lP eO'AP hanno gli angoli in A e in O' eguali. Sono perciò simili i i lati omologhi stanno fra di loro in proporzione.

AP_t:AP=AP:O'P

$AP_t=P_t$; AP=P;

Se ci limitiamo a piccole oscillazioni e cioè l'angolo in O' è piccolo:

AP=AO=s(spostamento misurato rispetto ad O);O'P=O'O=l(lunghezza del pendolo);

P_t:P=s:l

P_t=-P/l*s.

Il segno meno sta ad indicare che quando s è positivo, a destra di O, la forza và verso sinistra (punta verso O) ed è negativa, quando s è negativo, a sinistra di O, la forza che punta sempre verso O và verso destra ed è positiva.Siccome una volta costruito il pendolo P ed l sono costanti possiamo dire che la forza che fa avvenire il moto è direttamente proporzionale allo spostamento ed ha verso opposto ad esso. Ogni qualvolta su un corpo agisce una forza che ha queste caratteristiche il corpo oscillerà attorno ad una posizione di riposo(posizione nella quale la forza è nulla) ed il moto sarà detto armonico. Un altro moto oscillatorio è quello di una molla che abbia alla sua estremità collegato un corpo di massa m. Se infatti la molla è lasciata nella posizione in cui non è né allungata né accorciata, la forza sarà nulla. Questa è la posizione di riposo, che prendiamo come zero per gli spostamenti. Se spostiamo il corpo in A la molla si allungherà di una quantità Δl eguale allo spostamento, OA =x subito dal corpo. La molla agirà sul corpo con una forza F direttamente proporzionale all'allungamento x e che farà tornare il corpo verso O. Superato O dove il corpo giunge con la massima velocità la molla si comprime e genera una forza di verso contrario alla precedente, sempre diretta verso O. La velocità diminuisce fino ad annullarsi in B simmetrico di A rispetto ad O OB=-OA. La forza si può esprimere con F=-kx. Il moto sarà come per il pendolo oscillatorio attorno ad O e raggiungerà due posizioni simmetriche A e B in cui la velocità si annulla e quindi cambia verso.

Il periodo di oscillazione nella molla e nel pendolo dipenderanno dai valori dell'accelerazione, che non è costante. Infatti a=F/m.

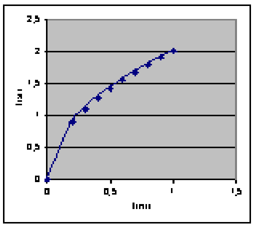
a(pendolo)=-P_t/m=-P/(ml)*s=-g/l*s;

a(molla)=-K/m*x.

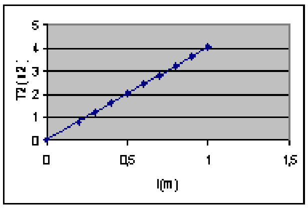
Per calcolare T(tempo impiegato per un'oscillazione completa) dovremo sapere l'accelerazione media, che sicuramente dipenderà nella molla da K e m e nel pendolo da g e l e in entrambi dall'intero spazio percorso in un'oscillazione AOBOA. Cambiando però l'ampiezza di oscillazione(massima distanza dalla posizione di riposo) OA, cambierà lo spazio percorso in un'oscillazione, ma nello stesso modo cambierà anche a media e quindi non cambierà T. Il periodo è cioè indipendente dall'ampiezza.

Per vedere come il periodo T dipende dagli altri fattori da cui dipende a, si faccia un'esperienza in cui si misura il periodo di un pendolo al variare di l. Si noti che T(come del resto l'accelerazione) di un pendolo non dipende dalla massa, ma oltre che da l anche da g, che in un luogo determinato è costante.I risultati che si ottengono da un'esperienza del genere possono essere riassunti dalle seguenti tabelle e grafici.

T(s)	l(m)	T/l
0	0	
0,9	0,2	4,5
1,1	0,3	3,7
1,3	0,4	3,2
1,4	0,5	2,8
1,6	0,6	2,6
1,7	0,7	2,4
1,8	0,8	2,2
1,9	0,9	2,1
2,0	1	2,0



T^2(s^2)	l(m)	T^2/l
0	0	
0,805	0,2	4,03
1,208	0,3	4,03
1,610	0,4	4,03
2.013	0,5	4,03
2,416	0,6	4,03
2,818	0,7	4,03
3.221	0,8	4,03
3,623	0,9	4,03
4,026	1	4,03



Dal grafico e dalla tabella si può notare che all'aumentare di l aumenta anche T ma non in modo direttamente proporzionale. Infatti il grafico non è una retta e il rapporto T/l non è costante. T aumenta più lentamente di l. Notare che quando l raddoppia T aumenta meno del doppio.Si prova perciò a mettere in relazione T^2 e l.Il grafico è una retta passante dall'origine e il rapporto è costante. Il periodo al quadrato è direttamente proporzionale alla lunghezza e il rapporto costante è $4s^2/m$.(1)Estraendo la radice quadrata a primo e secondo membro otteniamo la (2). Il periodo di un pendolo è direttamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza. Se notiamo che l'accelerazione di un pendolo è inversamente proporzionale a l e direttamente proporzionale a g (3), ci accorgiamo che anche il periodo deve dipendere da g ed esattamente per simmetria è inversamente proporzionale alla radice quadrata di g. Possiamo dire che in un determinato posto il periodo di oscillazione di un pendolo varia solo al variare della sua lunghezza ed è direttamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza poichè g è costante.

$$\frac{T^2}{l} = K \qquad T^2=Kl;\ \text{con}\ K=4\frac{s^2}{m} \quad (1)$$

$$a = \frac{g}{l}\, s \quad (3)$$

$$T=\sqrt{4\frac{s^2}{m}l} \qquad T=2\frac{s}{\sqrt{m}}\sqrt{l} \quad (2)$$

$$T= k\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \frac{k}{\sqrt{g}} = 2\frac{s}{\sqrt{m}}$$

$$k = 2\frac{s}{\sqrt{m}}\sqrt{g} \qquad k = 2\frac{\cancel{s}}{\sqrt{m}}\sqrt{9{,}8\frac{m}{\cancel{s^2}}} =6{,}28= 2\pi$$

$$T= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Nel caso della molla che oscilla, siccome l’accelerazione è direttamente proporzionale alla costante elastica e inversamente proporzionale alla massa, il periodo sarà direttamente proporzionale alla radice quadrata della massa e inversamente proporzionale alla radice quadrata della costante di elasticità.

La frequenza, che è l’inverso del periodo,per il pendolo cresce al diminuire della lunghezza, è cioè inversamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza.Nel caso del pendolo la frequenza è direttamente proporzionale alla radice quadrata della costante di elasticità ed veramente proporzionale alla radice della massa.

$$a_{pendolo} =-\frac{g}{l}\, s \qquad T= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$a_{molla} =-\frac{k_{el}}{m}\, s \qquad T= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{el}}}$$

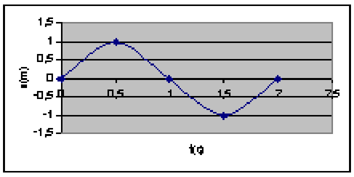
$$f_{pend} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

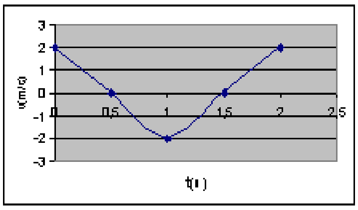
$$f_{molla} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{el}}{m}}$$

Si noti che il moto oscillatorio può anche essere ottenuto come proiezione su un asse, passante per il centro di una circonferenza, di un punto che percorre detta circonferenza in modo uniforme con velocità angolare $\omega=2\pi/T$.

La curva che rappresenta il diagramma orario di un moto oscillatorio è una sinusoide. Ammettiamo che al tempo zero il corpo sia in O e abbia una velocità verso destra. All'aumentare di t, x o s aumentano fino a raggiungere il punto estremo a destra, massima distanza dalla posizione di riposo $x_{max.}$ Per compiere tale spostamento che è la quarta parte dell'intera oscillazione l'oscillatore impiega un quarto di periodo. Dopo il corpo torna verso O e x diminuisce fino a diventare di nuovo 0 in O esattamente dopo metà periodo. Poi il corpo va verso sinistra e x è negativo. Dopo un altro quarto di periodo e cioè dopo 3/4T dall'inizio raggiunge la massima distanza a sinistra da O. Tale distanza sarà eguale e contraria a x_{max}. Costruiamo una tabella oraria e un grafico con un periodo di 2s e un'ampiezza di 1m.

t	t(s)	x(m)
0	0	0
T/4	0,5	1
T/2	1	0
3/4T	1,5	-1
T	2	0

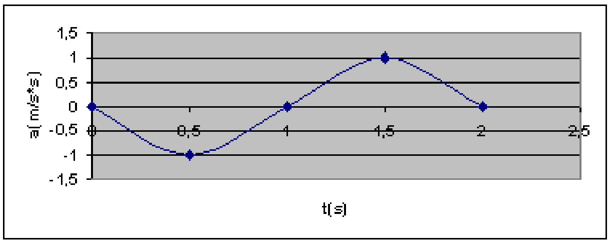




Dopo un periodo(2s) la curva si ripeterà eguale a sé stessa.La velocità avrà lo stesso andamento solo che al tempo 0 sarà massima a ¼ di periodo sarà zero a 1/2 di T avrà intensità massima, ma negativa, a ¾ di T zero e dopo un periodo massima.

L'accelerazione in funzione di t, siccome $a=-k*x$ con $k=g/l$ per il pendolo e $k=k_{el}/m$ per la molla, si ottiene dal grafico dello spazio capovolgendolo e moltiplicando il valore massimo per k.

Grafico dell'accelerazione


1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
a(m/s*s)
t(s)